Leo Remmel

Explizite Verwendung von Arkusfunktionen

1. Einleitung

Durchmustert man gängige Lehrpläne bzw. Lehrbücher, die in irgendeiner Form die (ebene) Trigonometrie enthalten, findet man zwar eine mehr oder weniger ausführliche und genaue Definition der Kreisfunktionen (sin, cos, tan, cot), aber nur ganz ausnahmsweise (der Verfasser kennt nur zwei Ausnahmen) eine explizite Darstellung deren Umkehrungen.

Im 2. Abschnitt soll zunächst vermutlichen Gründen dieser Tabuisierung nachgegangen werden. Im 3. Abschnitt wird gezeigt, wie der Elektronische Taschenrechner (nach Meinung des Autors) eine explizite Einführung der Umkehrungen der Kreisfunktionen bereits im Anfangsunterricht erzwingt. Der 4. Abschnitt berichtet schließlich von einer Erprobung im Unterricht.

2. Warum gibt es im Schulunterricht keine Arkusfunktionen?

Daß die Arkusfunktionen im Schulunterricht (zumindest in den Lehrplänen und Lehrbüchern) nicht vorkommen, scheint mir fast sicher zu sein. Weniger sicher sind die (von mir vermuteten) Gründe dafür:

- Zunächst ein innermathematischer Grund: Die Arkusfunktionen sind keine Funktionen.

- Die Einführung der Kreisfunktionen erfolgt fast ausschließlich über der Grundmenge $\{x \mid 0^\circ < x^\circ < 90^\circ\}$, die Arkusfunktionen scheinen aber als Wertemenge $\{y \mid 0 < y < \frac{\pi}{2}\}$ zu fordern.

- Kreisfunktionswerte wurden (werden) (fast) ausschließlich Tabellen entnommen, deren Argumente Winkel sind. Für die Arkusfunktionen gibt es keine eigenen Tabellen.

Ohne Zweifel gibt es noch weitere Gründe, die den Arkusfunktionen den Einzug in den Schulunterricht verwehrten. Vielleicht war es aber auch nur eine Anwendung des Ockham'schen Grundsatzes[1], schien doch eine Verwendung der Arkusfunktionen in der Trigonometrie überflüssig. Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der Winkel aus den Katheten zu berechnen, so schreibt man einfach $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ und nicht $\alpha = \arctan\frac{a}{b}$.

3. Das Diktat des Elektronischen Taschenrechners

Der im 2. Abschnitt eingenommene Standpunkt ist jedoch (meines Erachtens) mit der Verwendung Elektronischer Taschenrechner obsolet geworden. Die oben angeführte Aufgabe läßt sich nun beim besten Willen nicht mehr nach der ersten Art rechnen. Dazu müßte man ja den Winkel α so lange variieren, bis man jenen findet, für den $\tan\alpha$ den gegebenen Funktionswert $\frac{a}{b}$ hat. Das ist ohne Zweifel möglich, aber wohl nur als Animation zur Einführung der Arkusfunktionen. Letztere sind auf dem Elektronischen Taschenrechner nicht anders zu handhaben wie andere Funktionen auch: Man gibt das Argument ein (dieses kann natürlich auch Ergebnis einer Rechnung sein wie z. B. oben) und drückt die Funktionstaste.

Die Elektronischen Taschenrechner ersparen uns auch (zunächst) die Diskussion über die im 2. Abschnitt angeführten Zweifel. Sie verwenden nämlich in beiden Richtungen den Grad-Modus (falls man nicht bewußt einen anderen Modus wählt). Und sie liefern jedenfalls nur <u>einen</u> Wert, am Funktionscharakter der Arkusfunktionen kann daher (zunächst) nicht gezweifelt werden.

4. Ein Bericht aus der Schulpraxis

Forderungen zur Einführung neuer Verfahren, Funktionen u. ä. in den Schulunterricht werden oft erhoben. Hier soll diese Forderung nicht nur erhoben werden, sondern auch gleich gezeigt werden, wie sie im Unterricht bereits verwirklicht wurde.

---

[1] Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.

Die Ausgangssituation:

- Unterricht an einer "Höheren Lehranstalt für Mode und Kunstgewerbe" (berufsbildende Vollzeitschule mit allgemeiner Hochschulreife, 9. bis 13. Schuljahr); diese Schultype wird derzeit als Schulversuch geführt.
- Mathematikunterricht im 10. bis 13. Schuljahr, je zwei Wochenstunden.
- "Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks" laut provisorischem Lehrplan im 12. Schuljahr (u. a.).

Natürlich sind die Arkusfunktionen in diesem Lehrplan nicht enthalten. Der Versuchscharakter des Schultyps einerseits, die eher marginale Stellung der Mathematik in diesem Schultyp andererseits geben dem Lehrer eine sehr weitgehende Freiheit in der Auswahl des Lehrstoffes. Ich hatte daher keine Bedenken, die Arkusfunktionen einzuführen.

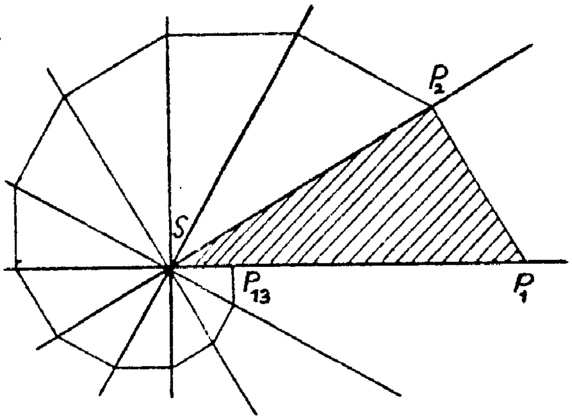
Die Schüler (17 Mädchen und 1 Knabe) sind vertraut mit

- dem Begriff Funktion (u. a. Menge geordneter Paare, Wertetabelle, Definitionsmenge, Wertemenge, Funktionsgleichung, Schaubild),
- dem Begriff Umkehrung einer Funktion und Umkehrfunktion (bereits vorher geübt an den Potenzfunktionen sowie an Exponential- und Logarithmusfunktionen),
- dem Umgang mit dem Elektronischen Taschenrechner (hauptsächlich TI 30, aber auch andere Modelle von TI bzw. von anderen Firmen).

Anknüpfungspunkt war folgende Übungsaufgabe zum Problemkreis "Geometrische Folgen und Reihen":

- Durch einen Punkt gehen 6 Geraden, die jeweils einen Winkel von 30° miteinander einschließen. Auf einer dieser Geraden werde in der Entfernung a (= 20,0 cm) ein Punkt P_1

angenommen. Die Normale durch P_1 auf die nächste Gerade trifft diese in P_2. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis ein voller Umlauf abgeschlossen ist. Zu berechnen ist die Länge des Streckenzuges $P_1P_2 \ldots P_{13}$ bzw. die Entfernung P_1P_{13}.



Nach einigem Probieren finden die Schüler bald, daß das schraffierte rechtwinklige Dreieck die Hälfte eines gleichseitigen ist und damit die Strecken P_1P_2 bzw. SP_2 leicht mit dem pythagoräischen Lehrsatz berechnet werden können.

Zum Glück (des Lehrers) kam bald die Schülerfrage: "Was soll man machen, wenn der Winkel nicht 30° beträgt?"

Die Schüler erhielten daraufhin ein Arbeitsblatt mit folgenden drei Aufgaben:

- Konstruiere jeweils ein rechtwinkliges Dreieck mit den angegebenen Seiten und Winkeln.
  1) $a = 4.1{,}04^{k-1}$ cm, $c = 5.1{,}04^{k-1}$ cm
  2) $a = (0{,}6 + 0{,}4k)$ cm, $c = 8{,}0$ cm
  3) $c = 8{,}0$ cm, $\alpha = (1 + 4k)^\circ$

Die Schüler sind gewohnt, bei solchen Aufgaben k durch ihre Katalognummer zu ersetzen und dann die Aufgabe durchzuführen.

Die Schüler wurden anschließend gebeten, beim 1. und 2. Beispiel den Winkel α und beim 3. Beispiel die Seite a möglichst genau zu messen. Die Ergebnisse wurden als Tafelanschrieb zusammengefaßt. Die Winkel im 1. Beispiel streuten (wie erwartet) um 53°, beim 2. und 3. Beispiel ergaben sich (in etwa) folgende Tabellen:

a cm	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2
$\alpha°$	7	10	13	16	19	22	25	28	31,5

a cm	4,6	5,0	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8
$\alpha°$	35	38,5	42,5	46,5	51	55,5	61	67,5	77

$\alpha°$	5	9	13	17	21	25	29	33	37
a cm	0,7	1,2	1,8	2,3	2,9	3,4	3,9	4,4	4,8

$\alpha°$	41	45	49	53	57	61	65	69	73
a cm	5,2	5,7	6,0	6,4	6,7	7,0	7,3	7,5	7,7

Die Schüler erkannten darin sehr rasch Funktionen und auch, daß die eine Funktion die Umkehrung der anderen ist. Bei der Diskussion des 1. Beispiels erkannten die Schüler sehr rasch die Ähnlichkeit aller ihrer Dreiecke und damit die Notwendigkeit gleicher Ergebnisse beim Messen des Winkels α. Diese Erkenntnis führte zu der Einsicht, bei den beiden Funktionen nicht a, sondern $\frac{a}{c}$ als Variable zu verwenden. Die obigen Tabellen wurden dann in dieser Weise umgerechnet.

Die Schüler sehen sehr rasch, daß keine lineare Funktion vorliegt. An Hand eines Graphen werden aber auch die Potenzfunktionen (den Schülern nur in der Form $x \longrightarrow ax^r$, a, r $\in$ Q, bekannt) verworfen und natürlich auch Exponential- und Logarithmusfunktion.

An dieser Stelle muß der Lehrer die Lösung angeben: Die zweite Funktion ist die Sinusfunktion und die erste ihre Umkehrung. Die Bezeichnung richtet sich nach dem Rechnertyp. Während SIN auf allen Rechnern zu finden ist, gibt es für die Umkehrung drei Bezeichnungen: INVSIN, ARCSIN, SIN^{-1}. Die erste und die dritte Bezeichnung bereitet den (d. h. meinen) Schülern keine Schwierigkeiten, da sie sowohl den Namen "inverse Funktion" wie auch das Symbol f^{-1} kennen. Die zweite Bezeichnung wird mit dem Hinweis erklärt, daß in verschiedenen Bereichen der Mathematik das Bogenmaß anstelle des Gradmaßes verwendet wird.

An dieser Stelle sei der Bericht abgebrochen, da wohl klar zu sehen ist, wie es jetzt weiter geht (bzw. ging). Zu beachten ist, daß (mit Rücksicht auf den Taschenrechner!) bei den Kreisfunktionen konsequent an der Definitionsmenge $\{x \mid 0^\circ \leq x \leq 90^\circ\}$ bzw. bei den Arkusfunktionen an der Wertemenge $\{y \mid 0^\circ \leq y \leq 90^\circ\}$ festgehalten wurde.